MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI CĂLĂRAŞI

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

EDITIA a X-a 9-11 DECEMBRIE 2005

Clasa a V-a

1. Ordonaţi crescător numerele: $5^{48}, \left(2^{16}\right)^{7}$ şi $3^{2^{6}}$.

2. Să se afle numerele naturale care împărţite la 29 dau un rest egal cu cubul câtului .

3. Ştim că Adrian şi Andreea sunt doi logicieni perfecţi iar n şi m două numere naturale astfel încât $n < m$ şi $8 < n + m < 12$. Adrian ştie numai valoarea lui $n \cdot m$ iar Andreea numai valoarea lui $n + m$. Între ei are loc următorul dialog:
Adrian: Eu nu pot să decid care sunt cele două numere.
Andreea: Ştiu cum ai procedat dar nici eu nu pot.
Adrian: De această informaţie aveam nevoie, acum ştiu care sunt cele două numere.
Care sunt numerele şi cum au gândit cei doi logicieni perfecţi (justificaţi raţionamentul)?

4. Să se determine toate numerele de patru cifre scrise în baza 10 care au suma cifrelor egală cu produsul lor.

5. Să se arate că numărul 2^{100} are exact 31 de cifre în scrierea lui în baza 10.

6. Să se calculeze numărul minim de zerouri cu care se termină produsul a 25 de numere naturale consecutive.

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI CĂLĂRAŞI

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

EDITIA a X-a 9-11 DECEMBRIE 2005

Clasa a VI-a

1. Numerele 89,141şi157 împărţite la acelaşi număr natural dau resturile 5,9 şi respectiv1. Aflaţi numărul la care au fost împărţite.

2. În interiorul unghiului $\angle AOB$ cu măsura de 75^0 considerăm semidreapta [OC astfel încât măsura unghiului $\angle AOC$ este de30^0. Dacă semidreapta [OD este astfel încât semidreapta [OB să fie bisectoarea $\angle COD$ şi [OE este opusa semidreptei [OA, să se afle $m(\angle AOD)$ şi $m(\angle BOE)$.

3. Se consideră şirul finit de numere naturale 1,2,3,…,2005. Un calculator aranjează aceste numere după următorul algoritm:
Pasul I: se inversează toate numerele din şir (un număr $a \neq 0$ este inversat dacă este scris sub forma $\frac{1}{a}$).
Pasul II: se inversează toate numerele din şirul obţinut la pasul I, al căror numitor este divizibil cu doi.
Pasul III: se inversează toate numerele din şirul obţinut la pasul II care sunt divizibile cu trei.
Câte numere din şirul obţinut la pasul III sunt identice cu cele din şirul iniţial?

4. Să se calculeze numărul de zerouri cu care se termină produsul $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot ... \cdot 100^{100}$.

5 a) Să se arate că diferenţa dintre un număr natural şi suma cifrelor sale este un număr divizibil cu 9.
b) Găsiţi cel mai mic număr natural care este mai mare decât suma cifrelor sale de 2005 ori.

6. Se consideră în plan cinci puncte, oricare trei necoliniare.
a) Câte segmente se pot construi cu capetele în aceste puncte?
b) Dacă aceste segmente se colorează cu două culori, să se arate că există trei puncte între cele cinci, cu proprietatea că segmentele care le unesc au aceeaşi culoare.

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI CĂLĂRAŞI

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

EDITIA a X-a 9-11 DECEMBRIE 2005

Clasa a VII-a

1. Determinaţi numărul de forma $\overline{abc}$ ştiind că $\frac{2a}{3b}=\frac{3b}{4c}=\frac{4c}{2a}$.

2. Un trapez isoscel are diagonalele perpendiculare. Arătaţi că mijloacele laturilor lui sunt vârfurile unui pătrat.

3. Considerăm $\Delta ABC, D\in[BC$ astfel ca $BD=\frac{3}{2}BC, E$ -mijlocul segmentului $[AB], F$ - mijlocul segmentului $[EB], DE\cap AC=\{M\}, BM\cap DF=\{G\}$ şi $EG\cap BC=\{N\}$.
a) Arătaţi că $BNME$ este trapez.
b) Aflaţi valoarea raportului $\frac{MC}{MA}$.

4. În triunghiul ABC se notează cu D simetricul punctului A faţă de dreapta BC şi cu E respectiv F mijloacele segmentelor AC şi BD. Fie M, N, P şi Q respectiv mijloacele segmentelor AF, DE, CF şi BE.
a) Să se demonstreze că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.
b) Arătaţi că $AB+BD+DC+AC\geq 4EF$

5. Să se determine câte numere de zece cifre au proprietatea că suma pătratelor cifrelor sale este egală cu suma cifrelor.

6. Fie $p_1, p_2, ...p_n, ...$ şirul numerelor prime. Să se arate că $p_n\geq 3n+10, \forall n\geq 19$.

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI CĂLĂRAŞI

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN „ION BARBU – DAN BARBILIAN”

EDITIA a X-a 9-11 DECEMBRIE 2005

Clasa a VIII-a

1. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $4x^2 + 9y^2 + 1 = 4x - 12y$ atunci $x + y \in \left[-\frac{11}{6}; \frac{3}{2}\right]$.

2. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB = a\sqrt{3}, BC = a$ şi $d(A; B'C) = \frac{a\sqrt{15}}{2}$. Determinaţi măsura $\sphericalangle(AD'; B'C)$.

3. Numerele naturale sunt plasate ca în figura următoare :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 2 & 3 & 4 & & & \\ & & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & & \\ & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & \\ 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{array}$$

……………………………………………………………..

a) Completaţi a următoare linie (a şasea) din figură .
b) Cu ce număr începe linia 2005 .

4. Pe planul triunghiului dreptunghic ABC, cu $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$ se ridică perpendiculara în B pe care se ia punctul M. Se notează cu D şi E picioarele perpendicularelor duse din B pe MA şi, respectiv, MC şi cu N punctul în care DE intersectează planul (ABC).

a) Demonstraţi că $AC \perp MA$.
b) Demonstraţi că $CD \perp MN$.

5. a) Să se arate că $(ax + by)^2 \le (a^2 + b^2)(x^2 + y^2), \forall a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

b) Se consideră triunghiul ABC cu laturile $AB = 2, BC = 3$ şi $AC = 4$ şi un punct variabil $M \in [BC]$. Fie P şi Q picioarele perpendicularelor duse din M pe laturile AB şi AC iar S aria triunghiului ABC. Să se arate că $2S = AB \cdot MP + AC \cdot MQ$.

c) Să se arate că $MP^2 + MQ^2 \ge \frac{4S^2}{AB^2 + AC^2}$.

6. Fie $\{a_1, a_2, ..., a_{20}\} = \{1, 2, ..., 20\}$ şi $s = (a_1 - 1)^2 + (a_2 - 2)^2 + ... + (a_{20} - 20)^2$

a) Să se demonstreze că numărul s este par.
b) Să se determine cea mai mare şi cea mai mică valoare pe care o poate lua s.