INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEȚULUI CĂLĂRAŞI
CONCURSUL INTERJUDEȚEAN „ION BARBU – DAN BARBILIAN” EDIȚIA a XV-a, 29-31 OCTOMBRIE 2010

Clasa a V – a

1. a) Numărul natural n se numeşte „generos” dacă suma cifrelor lui este mai mare decât suma cifrelor numărului $n+2$. Aflați suma tuturor numerelor „generoase” de două cifre.

prof. Luminița Bucureşteanu , Călăraşi

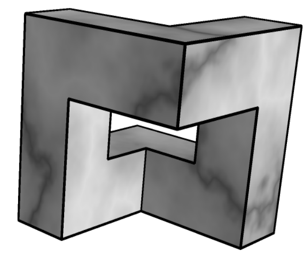
b) Câte numere naturale impare împărțite la 74 dau restul de trei ori mai mare decât câtul? (Justificați răspunsul)

prof. Sorin Furtună , Călăraşi

2. a) Patru prieteni au mers la pescuit şi au prins 11 peşti. Fiecare dintre ei a prins cel puțin un peşte. Care dintre afirmațiile următoare este cu siguranță adevărată? (Justificați răspunsul)

A. Cel puțin unul dintre ei a prins exact un peşte.
B. Cel puțin unul dintre ei a prins exact trei peşti.
C. Cel puțin unul dintre ei a prins mai mult de trei peşti.
D. Cel puțin unul dintre ei a prins mai puțin de trei peşti.
E. Cel puțin doi dintre ei au prins mai mult de un peşte.

b) Iulia a construit din 27 de cubulețe care au aceleaşi dimensiuni, prin lipire, un cub. Adezivul folosit nu a fost de calitate şi o parte din cubulețe s-au desprins. În final a rămas corpul din figura alăturată. Câte cubulețe s-au dezlipit? (Justificați răspunsul)



prof. Viorica Stoianovici , Călăraşi

3. Ana a reuşit să aşeze jetoanele numerotate 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 în căsuțele unui pătrat (cum este cel din figura 1), astfel încât suma numerelor de pe fiecare linie, de pe fiecare diagonală şi de pe fiecare coloană să fie acelaşi număr S.

a) Care este numărul S?
b) Cu aceleaşi jetoane s-a jucat sora ei mai mică şi le-a plasat la întâmplare. Ana a observat că numai jetoanele 5, 9 şi 17 erau aşezate pe locul corect. Reconstituiți voi dispunerea inițială (copiați şi completați figura 2).

Figura 1

	5	
9		17

Figura 2

Gheorghe Stoianovici, Călăraşi

4. a) Găsiți regula după care sunt formate corespondențele şi precizați care sunt numerele *a*, *b*, *c*, şi *d*.

23	34	45	$\boxed{a}$	67	$\boxed{b}$
↓	↓	↓	↓	↓	↓
13	25	41	61	$\boxed{c}$	$\boxed{d}$

Prof. Eugen Predoiu, Călăraşi

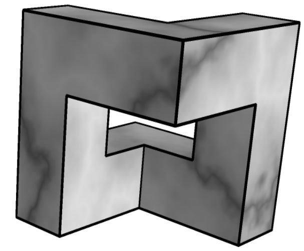
b) Determinați cifrele *a*, *b*, şi *c* astfel încât : $\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}=\overline{abc}$.

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI CĂLĂRAŞI
CONCURSUL INTERJUDEŢEAN „ION BARBU – DAN BARBILIAN” EDIŢIA a XV-a, 29-31 OCTOMBRIE 2010

Clasa a VI – a

1. a) Patru prieteni au mers la pescuit şi au prins 11 peşti. Fiecare dintre ei a prins cel puţin un peşte. Care dintre afirmaţiile următoare este cu siguranţă adevărată? (Justificaţi răspunsul)

A. Cel puţin unul dintre ei a prins exact un peşte.
B. Cel puţin unul dintre ei a prins exact trei peşti.
C. Cel puţin unul dintre ei a prins mai mult de trei peşti.
D. Cel puţin unul dintre ei a prins mai puţin de trei peşti.
E. Cel puţin doi dintre ei au prins mai mult de un peşte.



b) Iulia a construit din 27 de cubuleţe care au aceleaşi dimensiuni, prin lipire, un cub. Adezivul folosit nu a fost de calitate şi o parte din cubuleţe s-au desprins. În final a rămas corpul din figura alăturată. Câte cubuleţe s-au dezlipit?

prof. Viorica Stoianovici, Călăraşi

2. a) Fie $a, b, c \in \mathbb{N}$ astfel încât $2 \cdot c \mid a \cdot b,\ 3 \cdot a \mid b \cdot c,\ 5 \cdot b \mid c \cdot a$. Care este cea mai mică valoare posibilă a numărului $a \cdot b \cdot c$?

b) Un număr natural se numeşte „*n* magic” dacă are *n* cifre şi suma cifrelor este egală cu produsul cifrelor (ex. numărul 123 este „3 magic” deoarece are 3 cifre şi $1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$). Arătaţi că există numere „2 magic” şi „50 magic”.

prof. Gheorghe Stoianovici, Călăraşi

3. a) Elevii care urmau să participe la un concurs de matematică au fost cazaţi la un hotel situat în localitatea unde se desfăşura concursul, care avea 9 etaje şi parter. Se ştie că la etajul 3 au fost cazaţi 18 elevi, la etajul 8 au fost cazaţi 22 elevi iar la parter niciun elev. De asemeni se ştie că numărul de elevi cazaţi la oricare trei etaje consecutive este 50. Câţi elevi au fost cazaţi la etajul 1? (Justificaţi răspunsul)

prof. Relu Ciupea, Olteniţa

b) La o petrecere, 11 copii – 5 fete şi 6 băieţi – s-au prins într-o horă (într-un cerc). Ei dansează pe o melodie, iar la schimbarea melodiei se mai prind în horă alţi 11 copii, astfel:

- între oricare doi copii de acelaşi sex aflaţi iniţial în horă intră o fată;
- între o fată şi un băiat aflaţi iniţial în horă intră un băiat;
- primii 11 copii participanţi la joc se retrag, rămânând în horă cei 11 intraţi la schimbarea melodiei.

Să se arate că, ori de câte ori s-ar schimba melodia, nu pot rămâne în horă numai fete.

prof. Caţaros Aurelia şi Constantin Adriana, Călăraşi

4. a) Produsul a *n* numere naturale consecutive de 4 cifre este divizibil cu 2010^2. Determină cea mai mică valoare a lui *n* pentru care aceasta este posibil.

prof. Nela Costache, Călăraşi

b) Scrieţi numărul 2011^{2011} ca sumă de patru numere naturale pătrate perfecte.

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI CĂLĂRAŞI
CONCURSUL INTERJUDEŢEAN „ION BARBU – DAN BARBILIAN”
EDIŢIA a XV-a, 29-31 OCTOMBRIE 2010

Clasa a VII – a

1. a) Arătați că $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{9^2}<\frac{7}{12}$.

b) Fie $ABCD$ un patrulaterului convex cu proprietățile $[AD]\equiv[BD]\equiv[CD]$, $m(\angle ADB)=m(\angle DCA)$ şi $m(\angle CBD)=m(\angle BAC)$. Să se determine măsurile unghiurilor patrulaterului.

prof. Gheorghe Stoianovici, Călăraşi

2. Fie p un număr prim impar şi p numere naturale consecutive.

a) Arătați că unul dintre numere este media aritmetică a celorlalte p–1 numere.

b) Ştiind că suma celor p numere consecutive este pătratul unui număr prim, aflați în funcție de p cel mai mic, respectiv cel mai mare dintre numere.

prof. Adriana Olaru, Călăraşi

3. a) În triunghiul ABC, se consideră punctele $M\in(BC)$ şi $N\in(AC)$ astfel încât $AM\perp BC$ şi $BN\perp AC$. Arătați că dacă $[AM]\equiv[BN]$ atunci triunghiul ABC este isoscel.

b) În triunghiul ABC, se consideră punctul $D\in(AC)$ astfel încât $m(\sphericalangle CBD)=\frac{1}{3}\cdot m(\sphericalangle ABC)$ şi bisectoarea [CE a unghiului $\sphericalangle ACB, E\in(AB)$. Ştiind că $AD=BD$ şi $EA = EC$, aflați $m(\sphericalangle ADE)$.

prof. Sorin Furtună , Călăraşi

4. a) Fie $n\in\mathbb{N}$ şi mulțimea $M_n=\{n+k \mid k\in\mathbb{N},\ 1\le k\le 9\}$. Să se arate că orice submulțime a mulțimii M, care are şase elemente, conține patru numere distincte cu proprietatea că suma a două dintre ele este egală cu suma celorlalte două.

b) Determinați pentru care valori $n\ge 3$ poligonul regulat cu n laturi poate fi triangulat, prin diagonale care nu se intersectează în interiorul poligonului, în triunghiuri care sunt, toate, isoscele.

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEȚULUI CĂLĂRAŞI
CONCURSUL INTERJUDEȚEAN „ION BARBU – DAN BARBILIAN”
EDIȚIA a XV-a, 29-31 OCTOMBRIE 2010

Clasa a VIII – a

1. a) Se consideră pătratul $ABCD$ şi triunghiul dreptunghic isoscel CDE ($[CD]$ ipotenuza), cu interioarele disjuncte. Dacă $AE \cap DC = \{M\}$ şi $EB \cap CD = \{N\}$, arătați că $[CN] \equiv [MN] \equiv [MD]$.

prof. Camelia Iordache, Călăraşi

b) Dacă n este un număr natural impar $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $a+b+c \neq 0$, $a^n + b^n + c^n \neq 0$, şi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ atunci arătați că $\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}$.

prof. Cristina Bornea, Călăraşi

2. a) Fie paralelogramul $ABCD$, $AD < BD$ şi $BD \perp BC$. Să se demonstreze că $m(\angle ABC) = 105^0$ dacă şi numai dacă aria paralelogramului $ABCD$ este egală cu $\frac{AB^2}{4}$.

prof. Fianu Gheorghe, Ştefan cel Mare

b) Arătați că numărul natural a este suma a două numere naturale care sunt pătrate perfecte, dacă şi numai dacă există un număr natural b, astfel încât numerele $a\text{-}b$ şi $a+b$ să fie pătrate perfecte.

prof. Lucian Ioniță, Călăraşi

3. a) Dacă O este punctul de intersecția al diagonalelor trapezului $ABCD$ ($AB \parallel CD$) arătați că: $A_{AOB} + A_{COD} > A_{BOC} + A_{AOD}$ (s-a notat cu A_{EFG} aria triunghiului EFG).

b) Arătați că: $2010{,}499 < \frac{2^2+1}{2^2-1} + \frac{3^2+1}{3^2-1} + \frac{4^2+1}{4^2-1} + \cdots + \frac{2010^2+1}{2010^2-1} < 2010{,}5$.

prof. Gheorghe Stoianovici, Călăraşi

4. a) Determinați pentru care valori $n \geq 3$ poligonul regulat cu n laturi poate fi triangulat (prin diagonale care nu se intersectează în interiorul poligonului) în triunghiuri care sunt toate isoscele.

b) Fie $n \in \mathbb{N}$ şi mulțimea $M_n = \{n+k \mid k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq 9\}$. Să se arate că orice submulțime a mulțimii M, care are şase elemente, conține patru numere distincte cu proprietatea că suma a două dintre ele este egală cu suma celorlalte două.