CONCURSUL INTERNAŢIONAL „ION BARBU - DAN BARBILIAN”

Ediţia a XVIII - a, Călăraşi, 1 - 3 noiembrie 2013

Clasa a V–a

P 1. a) Există printre numerele 29, 27, 38, 33, 11, 14 trei numere astfel încât suma lor să fie 70 ? Justificați răspunsul!

b) Ana scrie, în ordine, numerele următoare: 1, 4, 6, 9, 11, 13, 16, 18, 20, 22, 25, 27, 29, 31, 33, …, …, …, …, …, … . Observați regula după care sunt scrise și găsiți suma celor șase numere care trebuie completate în cele șase poziții marcate prin puncte.

c) Este posibil să se împartă 5 mere de aceeași dimensiune, în mod egal, între șase copii, astfel încât cel puțin un măr nu va fi tăiat în mai mult de 3 bucăți? (Vi se permite să tăiați un măr în orice număr de bucăți egale). Justificați răspunsul!

Aurelia Cațaros, Călărași

P2. Patru numere naturale a, b, c, d formează un *„grup nostim”* dacă $a<b<c<d$, $2\cdot b=a+c$ și $2\cdot c=b+d$ (de exemplu numerele naturale $3, 6, 9, 12$ formează un *„grup nostim”* pentru că $3<6<9<12$, $2\cdot 6=3+9$ și $2\cdot 9=6+12$).

			88
70			
73		99	

a) Dă exemplu de *„grup nostim”* în care $a=5$.

b) Completează tabelul alăturat, fără să modifici numerele trecute în tabel, astfel încât numerele de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană să formeze un *„grup nostim”*.

Viorica Stoianovici, Călărași

P 3. a) În sala de așteptare a unui aeroport patru persoane care nu se cunosc între ele discută diverse. La un moment al discuției una dintre le întreabă pe celelalte trei: „Luna aceasta este ziua mea de naștere, câți ani credeți că o să împlinesc?”. Partenerii de discuție dau răspunsurile: 56 de ani, 60 de ani, 65 de ani. Cel care a întrebat comentează : „Unul dintre voi a greșit numai cu doi ani, altul cu trei ani și diferența cea mai mare este de șase ani.” Câți ani o să împlinească cel care a pus întrebarea? Justificați răspunsul!

b) Pentru recompensarea elevilor care au obținut rezultate bune la concursuri o școală a cumpărat 60 de dicționare de următoarele tipuri: Dicționar explicativ al limbii române (preț 80 RON), Dicționar englez – român, român – englez (preț 31 RON) și Dicționar spaniol – român, român – spaniol (preț 30 RON). Pentru cumpărarea dicționarelor s-au cheltuit 2013 RON. Câte dicționare s-au cumpărat din fiecare tip? Justificați răspunsul!

Adriana Constantin, Călărași

P4. Andrei și Bogdan joacă un joc pe calculator. Regula jocului este următoarea: pe ecranul monitorului apar inițial 25 de triunghiuri galbene și 25 de triunghiuri albastre iar cei doi jucători selectează pe rând două din cele 50 de triunghiuri și le schimbă culoarea. Astfel dacă triunghiul selectat este galben se colorează cu albastru iar dacă este albastru se colorează cu galben. Numim „pas” operația de selecție a două din cele 50 de triunghiuri, de către un jucător și schimbarea culorii acestora. După un număr de „pași” Andrei îi spune lui Bogdan: „ – Cred că indiferent cât de mult ne-am juca nu vom putea să colorăm toate cele 50 de triunghiuri cu aceeași culoare.” Bogdan îi răspunde: „ – Eu cred că se poate ca toate cele 50 de triunghiuri să fie colorate la fel.” Care dintre cei doi prieteni are dreptate? Justificați răspunsul!

Relu Ciupea, Oltenița

Succes

Barem de notare: P1. a) 2 puncte; b) 2 puncte; c) 3 puncte. **P2.** a) 3 puncte; b) 4 puncte. **P3.** a) 2 puncte; b) 5 puncte. **P4.** 7 puncte.

CONCURSUL INTERNAŢIONAL „ION BARBU - DAN BARBILIAN”

Ediţia a XVIII - a, Călăraşi, 1 - 3 noiembrie 2013

Clasa a VI–a

P1. a) Patru numere naturale a, b, c, d formează un „grup nostim” dacă $a<b<c<d$, $2\cdot b=a+c$ și $2\cdot c=b+d$ (de exemplu numerele naturale 3, 6, 9, 12 formează un „grup nostim” pentru că $3<6<9<12$, $2\cdot 6=3+9$ și $2\cdot 9=6+12$). Completează tabelul alăturat, fără să modifici numerele trecute în tabel, astfel încât numerele de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană să formeze un „*grup nostim*”.

			75
57			
60		86	

b) Completează cu numărul potrivit celula liberă din *Linia* 1 astfel încât numerele scrise în această linie să respecte regula după care sunt completate celelalte trei linii.

Linia 1	5	8		6
Linia 2	16	20	14	12
Linia 3	34	25	18	16
Linia 4	20	28	45	31

Viorica Stoianovici, Călăraşi

P 2. a) Doi băieţi, Alex şi Vlad au fost rugaţi de familiile lor să strângă nucile din curte în această toamnă. Cum ei sunt pasionaţi de numere, s-au gândit ca fiecare să strângă în fiecare zi acelaşi număr de nuci ca să le poată socoti mai uşor la final. Alex a strâns în primele zi câte 183 de nuci, dar în ultima zi i-au rămas doar 172 de nuci. Vlad a strâns în primele zile câte 671 de nuci, iar în ultima zi a strâns ultimele 660 de nuci. Socotind nucile strânse, au constatat că amândoi au acelaşi număr de nuci. Dacă niciunul n-a adunat nuci mai mult de două săptămâni, câte nuci a strâns fiecare?

b) Pe trei rafturi se află mai multe cărţi. Dacă s-ar muta $\frac{1}{3}$ din numărul cărţilor de pe primul raft, pe al doilea apoi $\frac{1}{4}$ din numărul iniţial de cărţi de pe raftul al doilea, pe al treilea şi, în sfârşit, $\frac{1}{5}$ din numărul iniţial de cărţi de pe raftul al treilea, pe primul, atunci pe fiecare raft s-ar afla acelaşi număr de cărţi. Dacă pe fiecare raft se află de 20 de ori mai multe cărţi decât numărul minim care verifică enunţul, aflaţi câte cărţi se află pe fiecare raft.

Gabriela Ruse și Sorin Furtună, Călărași

P 3. a) Ana are foarte multe cochilii de scoici asemănătoare pe care le așează ca în figura alăturată (sunt sugerate primele cinci rânduri). Dacă *a* este numărul de scoici așezate în primele 4 rânduri, *b* este numărul de scoici așezate în primele 6 rânduri și *c* este numărul de scoici așezate în primele 10 rânduri calculați *a*+*b*+*c*.

O mulțime nevidă $A\subset\mathbb{N}^*$ *se numește mulțime „pătratică” dacă suma elementelor sale este egală cu pătratul numărului său de elemente* (*de exemplu mulțimea* $A=\{1,\ 2,\ 6\}$ *este o mulțime „pătratică” deoarece* $1+2+6=3^2$).

b) Demonstrați că pentru orice n număr natural nenul există o mulțime „*pătratică*” cu n elemente.

c) Arătați că două mulțimi „*pătratice*” care au același număr de elemente, au cel puțin un element comun.

Relu Ciupea, Oltenița

P 4. Pe circumferința unui cerc se consideră 7 puncte care sunt colorate fiecare cu roșu sau cu negru. Prin transformare înțelegem schimbarea culorilor a trei puncte consecutive (din negru în roșu și din roșu în negru). .

a) Să se arate că printr-o succesiune de transformări putem obține orice colorare dorim.

b) Dacă pe circumferința cercului se consideră 6 puncte există o succesiune de transformări prin care putem obține orice colorare dorim? (Justificați răspunsul)

Vasile Pop, Cluj

Succes

Barem de notare: P1. a) 4 puncte; b) 3 puncte. **P2.** a) 4 puncte; b) 3 puncte. **P3.** a) 2 puncte; b) 2 puncte; c) 3 puncte. **P4.** a) 5 puncte; b) 2 puncte.

CONCURSUL INTERNAŢIONAL „ION BARBU - DAN BARBILIAN”

Ediţia a XVIII - a, Călăraşi, 1 - 3 noiembrie 2013

Clasa a VII–a

P 1. a) Găsiți numere naturale $n,\ n \geq 2$ cu proprietatea $\frac{1}{n} < 0{,}1025 < \frac{1}{n-1}$.

b) Fie $x,\ y,\ z \in \mathbb{Q} \setminus \{-2012\}$ astfel încât $\frac{1}{x+2012} + \frac{1}{y+2012} + \frac{1}{z+2012} = \frac{3}{2013}$, arătaţi că

$\frac{x}{x+2012} + \frac{y}{y+2012} + \frac{z}{z+2012} = \frac{3}{2013}$.

c) Găsiți toate numerele de trei cifre care nu conțin cifra 0 și suma inverselor cifrelor numărului este egală cu 1.

Adriana Olaru, Călărași

P 2. a) Fie $ABCD$ un patrulater convex iar punctele M și N mijloacele laturilor (AD) și (BC). Dacă $(AC) \cap (BD) = \{O\}$, $(MN) \cap (BD) = \{E\}$, $(AC) \cap (MN) = \{F\}$, $O \notin MN$ și $[OE] \equiv [OF]$ atunci $[AC] \equiv [BD]$.

b) Fie ΔABC, punctele $D \in (AC)$ și $E \in (AB)$ astfel încât $m(\measuredangle ABD) = m(\measuredangle CBD)$, $CE \perp AB$ și $m(\measuredangle BCE) = 20^{\circ}$. Dacă $BD \cap CE = \{F\}$ și punctul D aparține mediatoarea segmentului $[FC]$ atunci arătaţi că $BD + DF = AC$.

Cristina Bornea și Sorin Furtună, Călărași

P 3. Pentru orice număr natural n se notează cu P_n produsul cifrelor sale.

a) Arătați că pentru toate numerele naturale care au 2013 cifre $P_n < 10^{2013}$.

b) Găsiți toate numerele naturale n cu proprietatea $P_n = \frac{25}{8}n - 211$.

Viorica Stoianovici, Călăraşi

P 4. Pentru fiecare submulțime nevidă $A = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,a_k\}$ a mulțimii $\{1,\ 2,\ \ldots,10\}$, k=1, 2, … ,10 se consideră suma $S(A) = a_1 - a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3 - \cdots + (-1)^{k-1} a_1 a_2 \ldots a_k$, unde $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_k$. Să se determine suma tuturor acestor sume.

Vasile Pop, Cluj

Succes

Barem de notare: P1. a) 3 puncte; b) 2 puncte; c) 2 puncte. **P2.** a) 4 puncte; b) 3 puncte. **P3.** a) 2 puncte; b) 5 puncte. **P4.** 7 puncte.

CONCURSUL INTERNAŢIONAL „ION BARBU - DAN BARBILIAN”

Ediţia a XVIII - a, Călăraşi, 1 - 3 noiembrie 2013

Clasa a VIII–a

P1. a) Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \neq b, c \neq -a, c \neq -b$ și $a^2 + b^2 = 2c^2$ arătați că $\frac{(a+b+2c)(2a^2-b^2-c^2)}{(a-b)(a+c)(b+c)} = 3.$

b) Dacă $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ astfel încât $a \geq b \geq c$ arătați că $\frac{a^3-c^3}{3} \geq abc\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a}\right).$

c) Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea $a^3 + b^3 = c^3$ Arătați că cel puțin unul dintre numerele a, b, c este divizibil cu 3.

Adriana Constantin, Călărași

P 2. a) Fie triunghiul ABC și punctele $D \in (AB), E \in (BC), F \in (AC)$. Dacă triunghiul ADF este ascuțit unghic, $[EB] \equiv [ED]$ și $[EF] \equiv [EC]$ arătați că centrul cercului circumscris triunghiului ADF aparține bisectoarei unghiului DEF.

b) În pătratul $ABCD$, M este mijlocul laturii $[AB]$ și $N \in (AD)$ astfel încât $AN = 2DN$. Perpendiculara în M pe CM şi perpendiculara în N pe CN se intersectează în Q. Arătaţi că punctele A, Q și C sunt coliniare.

Cristina Bornea și Sorin Furtună, Călărași

P 3. Dacă ABC este un triunghi în care $[AB] \equiv [AC]$, $D \in (BC)$, $[BD] \equiv [CD]$, $E \in (BC)$, $E \neq D$, $F \in AC$ şi $AE \parallel BF$ arătați că $BC \cdot BF > 4AD \cdot BE.$

Gheorghe Stoianovici, Călăraşi

P 4. Fie **A** o mulțime de 5 numere naturale și $S = \{x + y | x, y \in A\}$. Să se arate că dacă mulțimea S are 9 elemente atunci suma numerelor din mulțimea A este divizibilă cu 5.

Vasile Pop, Cluj

Succes

Barem de notare: P1. a) 3 puncte; b) 2 puncte; c) 2 puncte. **P2.** a) 4 puncte; b) 3 puncte. **P3.** 7 puncte. **P4.** 7 puncte.