Danube Mathematical Competition, Călăraşi, 2007

Problema 1

Fie $n \geq 2$ un număr natural şi S_n mulţimea permutărilor pe $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pentru $\sigma \in S_n$ definim $l(\sigma) = \min\limits_{1 \leq i \leq n-1} |\sigma(i+1) - \sigma(i)|$. Să se determine $\max\limits_{\sigma \in S_n} l(\sigma)$.

Soluţie. Deoarece $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ este în imaginea lui σ, rezultă că

$$l(\sigma) \leq \min\left\{\left|\left[\frac{n+1}{2}\right] - 1\right|, \left|\left[\frac{n+1}{2}\right] - n\right|\right\} = \left[\frac{n}{2}\right].$$

Un exemplu care realizează $\left[\dfrac{n}{2}\right]$ este dat de permutarea

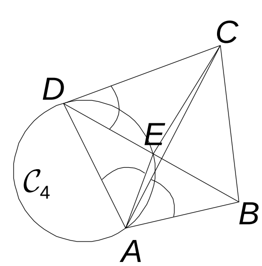
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ \left[\frac{n+1}{2}\right] & n & \left[\frac{n+1}{2}\right] - 1 & n-1 & \left[\frac{n+1}{2}\right] - 2 & n-2 & \ldots \end{pmatrix}$$

Observaţie. Dacă luăm în considerare şi $|\sigma(n) - \sigma(1)|$, valoarea căutată este $\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$.

Problema 2

Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil, E mijlocul diagonalei BD şi $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ cercurile circumscrise triunghiurilor AEB, BEC, CED, respectiv DEA. Să se arate că, dacă $\mathcal{C}_4$ este tangent la dreapta CD, atunci $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ sunt respectiv tangente la dreptele BC, AB, AD.

Soluţie. Din ipoteză rezultă $\angle DAE \equiv \angle CDE \equiv \angle CAB$, de unde $\angle BAE \equiv \angle CAD \equiv \angle CBD$, deci $\mathcal{C}_1$ este tangent la BC.



În plus, $\triangle DAE \sim \triangle CAB$, deci $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{BE}{BC}$, de unde $\dfrac{AD}{BE} = \dfrac{AC}{BC}$. Aceasta, împreună cu $\angle CAD \equiv \angle EBC$, arată că $\triangle DAC \sim \triangle EBC$, deci $\angle ECB \equiv \angle DCA \equiv \angle DBA$, adică AB este tangentă la $\mathcal{C}_2$.

În sfârşit, din $\mathcal{C}_2$ tangent la BC rezultă, ca la începutul soluţiei, $\mathcal{C}_3$ tangent la AD.

Problema 3

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ definim $f(n)$ ca fiind exponentul factorului prim 2 în descompunerea în factori primi a lui $n!$. Să se arate că, pentru orice $a \in \mathbb{N}^*$, ecuaţia $n - f(n) = a$ are o infinitate de soluţii.

Soluţie. Se ştie că $f(n) = \sum_{i \geq 1} \left[\frac{n}{2^i} \right]$ (Legendre). Pentru $n = 2^a - 1$, avem $n - f(n) = a$. Apoi, dacă $n - f(n) = a$ şi $2^k \leq n < 2^{k+1}$, rezultă imediat şi că $(n + 2^k) - f(n + 2^k) = a$, ceea ce permite construcţia unei familii infinite de soluţii.

Problema 4

Fie a şi n doi întregi pozitivi, cu $a \geq (n-1)!$. Să se arate că există numerele prime distincte $p_1, p_2, \ldots, p_n$ astfel încât $p_i \mid a + i, \forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Soluţie. Dacă $a+i$ are cel mult $n-1$ factori primi distincţi, atunci are descompunerea în factori primi $p_1^{e_1} \cdots p_s^{e_s}$, cu $1 \leq s < n$. Fie $q_j = p_j^{e_j}$. Deoarece numerele $q_1, \ldots, q_s$ sunt distincte şi $q_1 \cdots q_s > (n-1)!$, rezultă că măcar unul dintre ele, q_r, este cel puţin n. Asociem lui $a + i$ acest p_r.

Arătăm că numerele prime obţinute în acest mod sunt distincte. Într-adevăr, dacă numerele asociate astfel lui $a+i$ şi $a+i'$ ar fi egale, atunci $\min\{q_r, q_r'\}$ ar divide $|i-i'| < n$, în contradicţie cu $q_r \geq n, q_r' \geq n$.

Pentru numerele $a + \ell$ care au cel puţin n factori primi distincţi, putem alege un factor distinct de factorii deja aleşi.