Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Inspectoratul Şcolar Judeţean Călăraşi

Danube Mathematical Competition
Călăraşi, October 24$^{\text{th}}$, 2009

Problema 1. Fie AA', BB', CC' înălţimile din vârfurile A, B, C ale triunghiului ascuţitunghic ABC. Punctele E şi F se află pe segmentele CB' şi BC' respectiv, astfel încât $B'E \cdot C'F = BF \cdot CE$. Să se arate că patrulaterul $AEA'F$ este inscriptibil.

Problema 2. Să se arate că toate numerele întregi strict pozitive, exceptând puterile lui 2, pot fi scrise ca sumă de (cel puţin două) numere naturale consecutive.

Problema 3. Fie n un număr natural nenul. Să se determine numărul minim de triunghiuri echilaterale de latură 1 cu care se poate acoperi suprafaţa unui triunghi echilateral de latură $n + \frac{1}{2n}$.

Problema 4. Fie a, b şi c trei numere întregi strict pozitive. Să se arate că $|a - b\sqrt{c}| < \frac{1}{2b}$ dacă şi numai dacă $|a^2 - b^2c| < \sqrt{c}$.

Problema 5. Fie σ, τ două permutări ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$. Să se demonstreze că există o funcţie $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{-1, 1\}$ astfel încât pentru orice $1 \leq i \leq j \leq n$ avem

$$\left| \sum_{k=i}^{j} f(\sigma(k)) \right| \leq 2 \quad \text{şi} \quad \left| \sum_{k=i}^{j} f(\tau(k)) \right| \leq 2.$$