Cupa Dunării no 5 – Călăraşi, 30 octombrie 2010

Problema 1. Determinaţi numerele întregi $n \geq 3$ pentru care poligonul regulat cu n laturi poate fi descompus în triunghiuri isoscele prin diagonale care nu se intersectează în interiorul poligonului.

Problema 2. Fie ABC un triunghi, G centrul său de greutate şi A', B', respectiv C', proiecţiile ortogonale ale punctului G pe dreptele BC, CA, respectiv AB. Fie apoi A'', B'', respectiv C'', simetricele punctelor A', B', respectiv C', în raport cu punctul G. Arătaţi că dreptele AA'', BB'' şi CC'' sunt concurente.

Problema 3. Laturile şi diagonalele unui poligon convex cu n laturi, $n \geq 3$, sunt colorate cu una din două culori. Arătaţi că există cel puţin $\lfloor (n+1)/3 \rfloor$ segmente monocromatice disjuncte două câte două. (Două segmente sunt disjuncte dacă nu au o extremitate sau un punct interior în comun).

Problema 4. Fie p un număr prim congruent cu 3 modulo 4. Arătaţi că nu există patru numere întregi w, x, y, z, al căror produs nu este divizibil cu p, astfel încât $w^{2p} + x^{2p} + y^{2p} = z^{2p}$.

Problema 5. Fie n un număr întreg mai mare sau egal cu 3. Determinaţi numerele reale $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $\cdots$, $x_n \geq 0$, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$, pentru care expresia

$$(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + n x_1 x_2 \cdots x_n$$

ia valoarea minimă.

Timp de lucru 4 ore şi 30 de minute. Fiecare problemă valorează 7 puncte.