Călăraşi 2012 — Danube Cup

Problema 1. Fie n un număr natural nenul. Să se determine numărul maxim de puncte laticiale din plan (puncte de coordonate întregi), care pot fi acoperite de un pătrat de latură $n + \frac{1}{2n+1}$.

Problema 2. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi A_1, B_1, C_1 puncte situate pe laturile BC, CA, respectiv AB. Să se arate că triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt asemenea ($\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$) dacă şi numai dacă ortocentrul triunghiului $A_1B_1C_1$ coincide cu centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

Problema 3. Fie p şi q, $p < q$, două numere prime, astfel încât $1 + p + p^2 + \cdots + p^m$ este o putere a lui q şi $1 + q + q^2 + \cdots + q^n$ este o putere a lui p, unde m şi n sunt două numere naturale nenule. Să se arate că $p = 2$ şi $q = 2^t - 1$, unde t este prim.

Problema 4. Fie n un număr natural nenul. Să se arate că mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ poate fi partiţionată în m mulţimi, fiecare având aceeaşi sumă a elementelor, dacă şi numai dacă m este un divizor al lui $n(n + 1)/2$, mai mic sau egal cu $(n + 1)/2$.

Timp de lucru 3 ore şi jumătate.
Fiecare problemă este punctată cu 7 puncte.