Centrul de Excelenţă
Clasa a V –a

Divizibilitate. Puteri

1. Să se arate că numărul $S = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n + 1)$ este pătrat perfect, oricare ar fi numărul natural n.
2. Calculaţi :
   a) $S_1 = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{2005} + 5^{2006}$
   b) $S_2 = 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \ldots + 2^{2004} + 2^{2006}$
3. Calculaţi suma numerelor naturale de trei cifre divizibile cu 5, care nu sunt divizibile cu 2.
4. Arătaţi că numărul $N = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{2003} + 2^{2004}$ este divizibil cu 15.
5. Determinaţi numărul natural n pentru care numărul $N = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ este divizibil cu 5.
6. Se consideră numărul $a = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^{2005} + 7^{2006}$. Arătaţi că numărul $b = 6 \cdot 7^{2007} + 6a + 1$ este pătrat perfect.
7. Fie numărul
   $N = 1007 + 1008 + 1009 + \ldots + 2004 + 2005 - 8 - 9 - 10 - \ldots - 1005 - 1006$.
   a) Arătaţi că N este pătrat perfect
   b) Arătaţi că N este divizibil cu 111^2.
8. Arătaţi că numărul $A = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots + 3^{2005} + 3^{2006}$ nu este pătrat perfect.
9. Arătaţi că numărul
   $A = 2000^{2000} + 2001^{2001} + 2002^{2002} + 2003^{2003} + 2004^{2004} + 2005^{2005}$ nu este pătrat perfect.
10. Fie numerele $A = 10 \cdot 3 + 10 \cdot 3^2 + 10 \cdot 3^3 + \ldots + 10 \cdot 3^{2005} + 100$ şi
    $B = (3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2005}) \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2005} + 10)$
    a) Arătaţi că A + B este pătrat perfect
    b) Arătaţi că $A < 3^{2008}$.
11. Arătaţi că $321^{123} < 123^{321}$.
12. Se dau numerele $x = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \ldots + 2003 \cdot 2004 + 2005 \cdot 2006$ şi $y = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + 2003^2 + 2005^2$. Să se determine numărul natural n pentru care $n^2 = x - y$.
13. Fie numerele $a = 2^{2008} + 2 + 2^{4013}$ şi $b = 2^{2006} + 1$. Arătaţi că a este divizibil cu b^2.
14. Calculaţi $10^{2006} - 9 \cdot 10^{2005} - 9 \cdot 10^{2004} - 9 \cdot 10^{2003} - \ldots - 9 \cdot 10^2 - 9 \cdot 10 - 9$.