

Numere raționale - aplicații

1. Comparați numerele

$$A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2013 \cdot 2014} + \frac{1}{2014 \cdot 2015} \quad \text{și}$$

$$B = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{2009 \cdot 2012} + \frac{1}{2012 \cdot 2015}$$

2. Arătați că $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{2011 \cdot 2013} + \frac{1}{2013 \cdot 2015} < \frac{1}{2}$

3. Arătați că $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{2012^2} + \frac{1}{2014^2} < \frac{2013}{4028}$

4. Fie $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2014} \in \mathbf{N}$ cu proprietatea că $S = \frac{1}{1+a_1} + \frac{2}{2+a_2} + \frac{3}{3+a_3} + \dots + \frac{2014}{2014+a_{2014}} = 1007$.

$$\text{Calculați } S_1 = \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{2+a_2} + \frac{a_3}{3+a_3} + \dots + \frac{a_{2014}}{2014+a_{2014}}.$$

5. Fie $a, b, c \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $\frac{ac+b}{c}, \frac{ab+c}{a}, \frac{bc+a}{b} \in \mathbf{N}$, atunci $ab + bc + ac$ divide $a^2 + b^2 + c^2$.

6. a) Arătați că fracția $\frac{n}{8n+1}$ este ireductibilă pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

b) Determinați $n \in \mathbf{N}^*$ pentru care fracția $\frac{n+1}{8n+1}$ este reductibilă.

7. Să se determine cel mai mic număr natural n astfel încât numărul $A = \frac{8^{2n+3} - 4^{3n+2} - 2^{6n+6}}{2^{2003} - 2^{2002} - 2^{2001}}$ să fie număr natural.

8. Calculați media aritmetică a numerelor

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2015} \quad \text{și} \quad B = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{2014}{2015}.$$

9. Arătați că dacă trei numere naturale au proprietatea că fiecare din ele este media aritmetică a celorlalte două, atunci cele trei numere sunt egale.

10. Media aritmetică a numerelor $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2000}$ este 2015, iar media aritmetică a numerelor $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2000}, a_{2001}, a_{2002}, \dots, a_{2015}$ este tot 2015. Calculați media aritmetică a numerelor $a_{2001}, a_{2002}, \dots, a_{2015}$.

11. Se dă un număr de trei cifre la care cifra zecilor este media aritmetică a celorlalte două cifre. Arătați că suma dintre acest număr și numărul format de cifra unităților este divizibil cu 7.

12. Media aritmetică a trei numere este 28. Primul este cu 4 mai mare decât al doilea, iar media aritmetică dintre primul și al treilea este 30. Aflați numerele.

13. Aflați 5 numere a, b, c, d, e știind că $\frac{1}{2}$ din media aritmetică a numerelor a, b, c, d este 22, $\frac{1}{2}$ din media aritmetică a numerelor b, c, d, e este 34, $\frac{1}{4}$ din media aritmetică a numerelor a, b, c este 8, $\frac{1}{4}$ din media aritmetică a numerelor c, d, e este 20 și $\frac{1}{8}$ din media aritmetică a numerelor a, b, c, d, e este 7.