Centrul de Excelenţă
Clasa a V –a

Probleme de olimpiadă

1. Fie S = $2^{989} + 3 \cdot 2^{987} + 7 \cdot 2^{984} + 15 \cdot 2^{980} + \ldots + (2^{43} - 1) \cdot 2^{44} + 2^{44} - 1$.
   Arătați că S = $2^{990} - 1$.
2. Fie șirul 1, 4, 13, 40,…
   a) Să se afle următorii 2 termeni ai șirului.
   b) Să se arate că diferența dintre al 2009-lea termen al șirului și al 1007-lea termen al șirului este divizibilă cu 13.
3. a) Să se arate că suma a 7 numere naturale consecutive este divizibilă cu 7.
   b) Să se arate că dacă n este număr natural impar, atunci suma a n numere naturale consecutive este divizibilă cu n.
4. Un număr de forma $\overline{xxy5}$ împărţit la un număr pătrat perfect de două cifre dă câtul tot un număr pătrat perfect, iar ca rest 64. Care este acest număr de patru cifre?
5. Zece numere impare diferite împărţite fiecare la 20 au rezultatul (câtul) egal cu restul împărţirii. Care este suma acestor zece numere?
6. Aflați numărul natural care se împarte exact la 67, iar prin împărțirea la 65 dă restul 60 și câtul egal cu cel de la împărțirea cu 67.
7. Se dau numerele $x = 2 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + \ldots + 2^{2009}$ și $y = 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \ldots + 2^{2008}$.
   a) Aflați ultima cifră a numărului 3(x – y)
   b) Scrieți numărul (x + y + 1) ca un pătrat perfect;
   c) Scrieți numărul (x + y + 1) ca un pătrat perfect.
8. Arătați că dacă adunăm toate numerele naturale care împărțite la 2010 dau câtul 13, obținem un număr care se divide cu 67.
9. Se consideră numerele
   $$a = \frac{2+2^2+2^3+\ldots+2^{2010}}{2+2^4+2^7+\ldots+2^{2008}};\quad b = \frac{3+3^2+3^3+\ldots+3^{2010}}{3+3^3+3^5+\ldots+3^{2009}}\qquad c = \frac{5+5^2+5^3+\ldots+5^{2010}}{5+5^6+5^{11}+\ldots+5^{2006}}$$
   Arătați că $a + b + c \in \mathbf{N}$.
10. Mai mulți prieteni vor să lanseze un joc pe e-mail. Regula jocului este următoarea:
    Primul prieten, adică Edy, trimite în prima zi un e-mail lui Ady. Ady trimite acest e-mail a doua zi la alți doi prieteni, fiecare la rândul lor îl trimit a treia zi altor doi prieteni și astfel jocul continuă.
    a) Aflați în câte zile au fost trimise 2047 e-mailuri.
    b) Câți copii au participat în 11 zile?
11. a) Determinați numărul natural n astfel încât numărul $A = 2^n \cdot 15^{n+1} \cdot 10^2 - 6^n \cdot 5^{n+2} \cdot 3^3 + 3^{n+1} \cdot 10^n \cdot 5^2$ să se termine în 2010 zerouri.
    b) Determinați numerele naturale a și b știind că $a^2 = 2069 + 2^b + a$.

1. Se consideră şirul de numere naturale: 0, 25, 50, 75, 100, 125, 150, 175 , ... şi un al doilea şir, care are ca termeni numerele obţinute efectuând suma cifrelor la fiecare din termenii primului şir: 0, 7, 5, 12, 1, 8, 6, 13, …
   a) Să se determine al 2011-lea termen din primul şir.

12. b) Demonstraţi că orice număr natural este termen al celui de-al doilea şir.
13. a) Scrieți numărul 2009^{2009} sub forma $x^2 + y^2$, unde $x, y \in \mathbf{N}^*$.
    b) Scrieți numerele 2010 și 2010^{2011} sub forma $x^2 + y^2 + z^2$, unde $x, y, z \in \mathbf{N}^*$.
14. Un număr se numeşte "miraculos" dacă este natural şi este egal cu suma pătratelor a doi divizori distincţi ai săi.
    a) Să se dea un exemplu de număr "miraculos".
    b) Să se arate că există cel puţin 2011 numere "miraculoase".