

Probleme de olimpiadă

1. Determinați cifrele nenule a, b, c astfel încât $\overline{ab}^2 = \overline{cab}$.
(Olimpiada județeană 2013)
2. Se consideră mulțimea $M = \{2^1, 2^1, 2^3, \dots, 2^{15}\}$. Arătați că nu există trei submulțimi X, Y, Z nevide și disjuncte două câte două astfel încât $X \cup Y \cup Z = M$, iar suma elementelor fiecărei mulțimi să fie aceeași.
(Olimpiada județeană 2013)
3. Aflați numerele de 3 cifre care se micșorează de 9 ori dacă li se șterge cifra din mijloc.
(Olimpiada județeană 2012)
4. a) Care puteri ale numărului 2 se scriu cu 4 cifre (în baza 10)?
b) Fie n un număr natural nenul. Arătați că există cel puțin 3 puteri ale lui 2 care se scriu cu n cifre (în baza 10)
(Olimpiada județeană 2012)
5. Se consideră 51 de numere naturale pare diferite două câte două. Demonstrați că putem alege două dintre acestea cu proprietatea că produsul dintre suma și diferența lor este divizibil cu 400.
(Olimpiada județeană 2012)
6. Într-o cutie se află 36 de bile numerotate de la 1 la 36. Ion încearcă să elimine bilele din cutie, în etape. Fiecare etapă constă în următoarea succesiune de operații:
 - Ion extrage la întâmplare 4 bile din urnă.
 - Ion elimină câte două bile din cele patru dacă diferența numerelor înscrise pe acestea este divizibilă cu 3.
 - Ion reintroduce în urnă bilele care nu au fost eliminate.a) Arătați, că în fiecare etapă, Ion poate elimina cel puțin două bile.
b) Arătați că, dacă în cutie rămân numai patru bile, atunci Ion le poate elimina pe toate.
(Olimpiada județeană 2012)
7. Un număr se numește misterios \overline{abc} se numește „misterios” dacă restul împărțirii lui a la b este 1.
a) Câte numere „misterioase” există ?
b) Care este cel mai mare număr „misterios” divizibil cu 6?
(Olimpiada județeană 2011 Călărași)