Centrul de Excelenţă
Clasa a VI –a

Probleme de concurs

1. Determinaţi toate perechile de numere naturale prime astfel ca împărţind unul din ele la celălalt să obţinem restul egal cu câtul.
2. Fie numerele raţionale pozitive $A=\frac{12}{48}+\frac{102}{408}+\frac{1002}{4008}+\frac{10002}{40008}$ şi
   $B=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2008}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+...+\frac{2007}{2008}$. Calculaţi B – A, A^B, $(B-2002)^{A+1}$.
3. Se consideră numerele $a=2^{n+12}:\left(2^3\right)^4+3^{2n}:9^n$, $b=\frac{49\cdot 14^n+22^n\cdot 11}{11^{n+1}+7^{n+2}}$,
   $c=2^{n+3}-2^{n+2}-2^{n+1}-2^n-2^0$, unde $n\in\mathbf{N}^*$.
   a) Calculaţi numerele
   b) Stabiliţi dacă $A=\frac{1}{ab}+\frac{2}{bc}-\frac{3}{ac}$ este fracţie zecimală finită, periodică simplă sau periodică mixtă.
4. Arătați că:
   a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{5}{6}\right)^3=1$
   b) $3^{33}+4^{33}+5^{33}<6^{33}$
5. Spunem că mulțimea nevidă M de cardinal n are proprietatea *P* dacă elementele sale sunt numere naturale care au exact 4 divizori. Notăm cu S_M suma tuturor celor 4n divizori ai elementelor unei astfel de mulțimi M (suma conține și termeni care se repetă).
   a) Arătați că $A=\{2\cdot 37, 19\cdot 37, 29\cdot 37\}$ are proprietatea *P* și S_A = 2014.
   b) În cazul în care o mulțime B are proprietatea *P* și $8\in B$, demonstrați că $S_B\neq 2014$.
6. Să se determine un număr natural știind că are numai 3 divizori, iar suma divizorilor săi este 871.
7. Despre trei numere naturale a, b, c se știe că mediile aritmetice a câte două dintre ele sunt $7\cdot 3^{2008}$, 3^{2009}, 3^{2010}. Aflați cele trei numere.
8. Se consideră trei puncte coliniare distincte A, B, C astfel încât B să fie situat între A şi C.Fie M mijlocul segmentului [AB] şi N mijlocul segmentului [BC]. Să se arate că:
   a) AC = 2MN
   b) Dacă segmentele [MN] şi [AC] au acelaşi mijloc, atunci AB = BC.
9. Se dau punctele coliniare A, B, C, D astfel încât $B\in(AC)$, $C\in(BD)$, BC = 3AB şi CD = 2BC. Fie M şi N mijloacele segmentelor [AC], respectiv [AD], iar MN = 15 cm. Aflaţi lungimile segmentelor [AB], [BC] şi [CD].
10. Fie $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ şi $\angle DOA$ unghiuri formate în jurul punctului O. Bisectoarea unghiului $\angle BOC$ şi semidreapta [OD sunt semidrepte opuse. Dacă [OD $\perp$ [OA şi $m(\angle AOB)=45°$, să se arate că:
    a) $OC\perp OB$
    b) bisectoarele unghiurilor AOB şi COD sunt semidrepte opuse.