Centrul de Excelenţă
Clasa a VI –a

Probleme de concurs

1. Fie unghiul $\angle XOY$ şi A, B $\in$[OX, C, D $\in$[OY astfel încât [OA] $\equiv$ [OC], [OB] $\equiv$ [OD], AD $\cap$BC = {P}. Fie M şi N mijloacele segmentelor [AC], respectiv [BD]. Să se arate că:
   a) $\Delta OBC \equiv \Delta ODA$
   b) $\Delta APB \equiv \Delta CPD$
   c) Punctele O, M, P, N sunt coliniare.

2. În ΔABC în care AB < AC, [AD este bisectoarea unghiului A (D $\in$BC). Perpendiculara în A pe AD intersectează dreapta BC în M. Fie P $\in$ AM astfel încât AM = AP. Să se arate că:
   a) $\Delta AMD \equiv \Delta APD$
   b) AD $\perp$ BE, unde {E} = AC $\cap$ PD.

3. Într-o urnă sunt r bile roşii, g bile galbene şi a bile albastre. Se extrage o bilă şi se notează cu p_1, p_2, p_3 probabilitatea ca bila extrasă să nu fie roşie, să nu fie galbenă, respectiv să nu fie albastră. Se ştie că p_1 este 80% din p_2 şi p_2 este 62,5% din p_3.
   a) Arătaţi că $p_1 + p_2 + p_3 = 2$
   b) Arătaţi că r = g + 2a.

4. Aflaţi 100 numere raţionale pozitive invers proporţionale cu 2, 6, 12, …, $100 \cdot 101$, ştiind că suma lor este 20% din suma primelor 100 numere naturale nenule.

5. Fie proporţiile $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$ şi $\frac{y}{4}=\frac{z}{5}$, unde x, y, z sunt numere raţionale pozitive. Determinaţi numerele x, y şi z ştiind că $x^2 + y^2 + z^2 = 433$.

6. Două dintre unghiurile unui triunghi au măsurile direct proporţionale cu numerele 2 şi 3, iar alte două unghiuri ale triunghiului au măsurile invers proporţionale cu numerele 5 şi 6. Aflaţi valorile naturale ale măsurilor unghiurilor triunghiului.

7. Dacă elevii unei şcoli sunt grupaţi câte 2, 3, 4, 5, 6 rămâne de fiecare dată un elev negrupat. Dacă se grupează câte 7, nu rămâne nici un elev. Arătaţi că în şcoală sunt cel puţin 26 de elevi care îşi serbează ziua de naştere în aceeaşi lună.

8. Determinaţi numerele naturale nenule x, y, z ştiind că $\frac{x}{2(y+z)}=\frac{y}{5(z+x)}=\frac{z}{10(x+y)}=\frac{3}{5(x+y+z)}$.

9. Media aritmetică a numerelor $a_1, a_2, a_3,\ldots,a_{2006}$, 2006 şi 2008 este 2007. Calculaţi media aritmetică a numerelor $a_1, a_2, a_3,\ldots,a_{2006}$.

10. Dacă $\frac{x}{y}+\frac{x}{z}=1,1$ şi $\frac{y}{z}=\frac{5}{2}$, aflaţi $\frac{x}{y}$ şi $\frac{x}{z}$.

11. Demonstraţi că $\frac{85}{198}<\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{2}{6\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 8}+...+\frac{49}{53\cdot 54}+\frac{50}{54\cdot 55}<43$.