Centrul de Excelenţă
Clasa a VI-a

Numere raționale

1. a) Arătați că fracția $\frac{2n+5}{3n+7}$ este ireductibilă pentru orice număr natural n.

   b) Arătați că există o infinitate de perechi de numere naturale (a, b) pentru care fracția $\frac{2n+a}{3n+b}$ este ireductibilă.
2. Arătați că fracția $\frac{2n+1}{n^2+n}$ este ireductibilă pentru orice număr natural n.
3. Se dau numerele $a=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2013}{2014}\cdot\frac{2015}{2016}$ și $b=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2012}{2013}\cdot\frac{2014}{2015}$. Comparați a cu b și a^2 cu ab.
4. Fie $a, b, c \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $\frac{ac+b}{c}, \frac{ab+c}{a}, \frac{bc+a}{b} \in \mathrm{N}$. Demonstrați că $(ab + bc + ac)$ divide $(a^2 + b^2 + c^2)$.
5. Arătați că $\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$. Calculați sumele:

   $S_1=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{2011\cdot 2013}+\frac{1}{2013\cdot 2015}$; $S_2=\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\ldots+\frac{1}{2006\cdot 2011}+\frac{1}{2011\cdot 2016}$
6. Se consideră numerele $a=\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\ldots+\frac{2016}{2015}$ și $b=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2015}\right)\cdot\frac{1}{2}$. Determinați restul împărțirii la 4 al numărului $a-2b$.
7. Demonstraţi inegalitatea $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots+\frac{1}{2016^2}<\frac{2015}{2016}$.
8. Dacă $\frac{1}{x+2015}+\frac{1}{y+2015}+\frac{1}{z+2015}=\frac{3}{2016}$, arătaţi că $\frac{x}{x+2015}+\frac{y}{y+2015}+\frac{z}{z+2015}=\frac{3}{2016}$.
9. Aflaţi $x \in \mathbf{N}$ astfel încât $\frac{2006}{x+1}+\frac{2007}{x+2}+\frac{2008}{x+3}+\ldots+\frac{2015}{x+10}=10$.
10. Fie $a_1, a_2, a_3,\ldots,a_{2016} \in \mathbf{N}$ astfel încât $\frac{1}{1+a_1}+\frac{2}{2+a_2}+\frac{3}{3+a_3}+\ldots+\frac{2016}{2016+a_{2016}}=1008$.

    Arătați că $\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{2+a_2}+\frac{a_3}{3+a_3}+\ldots+\frac{a_{2016}}{2016+a_{2016}}=1008$.
11. Fie $a=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}$, $b=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2n}$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Arătaţi că $\mathrm{N}=27^{n+1}\cdot\left(\frac{a}{2}-b+\frac{5}{2}\right)^n$ este număr natural şi determinaţi ultima cifră a sa.
12. Fie $S=\frac{1}{1010}+\frac{1}{1012}+\frac{1}{1014}+\ldots+\frac{1}{2014}+\frac{1}{2016}$. Demonstrați că $\frac{1}{5}<S<\frac{1}{2}$.