Centrul de Excelenţă
Clasa a VI –a

Probleme de olimpiadă

1. Fie triunghiul ABC cu $[AB] \equiv [AC]$ și punctele $D, E \in BC$ astfel încât $B \in (DC)$, $C \in (BE)$ și $[BD] \equiv [CE]$. Perpendiculara în D pe AD intersectează perpendiculara în E pe AE în punctul F. Să se arate că [AF este bisectoarea unghiului BAC.
2. Se dă triunghiul ABC. Punctele M și N aparțin dreptei BC astfel încât $[AB] \equiv [BM]$, $B \in (MC)$, $[AC] \equiv [CN]$, $C \in (BN)$. Perpendicularele din B și C pe dreptele AM, respectiv AN se intersectează în punctul I. Să se demonstreze că:
   a) Triunghiurile ΔMAI, ΔNAI și ΔMIN sunt isoscele;
   b) [AI este bisectoarea unghiului BAC.
3. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\angle BAC) = 36°$și $m(\angle ACB) = 72°$. În punctul M, mijlocul segmentului [AC], se construiește dreapta perpendiculară pe AC, care se intersectează cu dreapta BC în punctul D, și cu segmentul [AB] în punctul N. Să se demonstreze că:
   a) $[AD] \equiv [DC]$;
   b) Bisectoarele unghiurilor triunghiului ADC sunt concurente în N.
4. Se dă triunghiul ABC cu AB = AC = 6 cm și BC = 10 cm. Bisectoarea unghiului B intersectează pe AC în E, iar perpendiculara din C pe BE intersectează pe AB în P. Arătați că perimetrul triunghiului AEP este egal cu BC.
5. Să se determine un număr natural știind că are numai 3 divizori, iar suma divizorilor săi este 871.
6. Să se determine numărul natural $\overline{abcd}$ știind că $4 + 8 + 12 + \ldots + \overline{abcd} = \overline{abcd000}$.
7. Se scriu în ordine descrescătoare divizorii numărului 6^{2009}.
   a) care este al zecelea număr scris?
   b) Calculați suma divizorilor impari.
   c) Arătați că suma divizorilor impari divide suma divizorilor pari.

8. La o testare, Andrei a răspuns corect la 6 întrebări din primele 8. Din restul întrebărilor a răspuns corect la o treime. Fiecare întrebare a avut același punctaj și Andrei a avut un punctaj de 50% din punctajul maxim. Câte întrebări a avut testul?
9. Se consideră mulțimea $M = \left\{\frac{2011}{2}, \frac{2012}{3}, \frac{2013}{4}, \frac{2014}{5}, \ldots\right\}$. Câte numere naturale conține mulțimea M?
10. Despre trei numere naturale a, b, c se știe că mediile aritmetice a câte două dintre ele sunt $7 \cdot 3^{2008}$, 3^{2009}, 3^{2010}. Aflați cele trei numere.
11. Șirul 7, 15, 31, 63, ... conține 99 termeni.
   a) Aflați ultimul termen al șirului.
   b) Câți termeni sunt divizibili cu 5?
   c) Arătați că suma celor 99 de termeni nu este pătrat perfect.