Centrul de Excelenţă
Clasa a VI –a

Numere întregi. Triunghiuri

1. Se dă triunghiul isoscel ABC cu $[AB] \equiv [AC]$ și $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Fie $P \in (AB)$ și $R \in (AC)$ astfel încât $\angle ADP \equiv \angle ADR$. Demonstrați că:
   a) $AD \perp PR$;
   b) $PR \parallel BC$.

2. În ΔABC, $m(\angle ACB) = 40°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$, $I \in AD$ astfel încât $\angle ACI \equiv \angle ICB$ și $IC \cap AB = \{E\}$. Știind că $m(\angle AEI) = 80°$, aflați:
   a) $m(\angle AIE)$;
   b) măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

3. Se dă un triunghi ABC și [AD bisectoarea unghiului $\angle BAC$, $D \in (BC)$. Fie $DE \parallel AB$, $E \in (AC)$ și $EF \parallel AD$, $F \in (BC)$. Demonstrați că:
   a) $[AE] \equiv [DE]$;
   b) $\angle DEF \equiv \angle CEF$.

4. Fie a, b, c $\in$ **Z*** cu proprietatea $\dfrac{a^2+b^2}{c^2} = \dfrac{b^2+c^2}{a^2} = \dfrac{c^2+a^2}{b^2}$.
   a) Demonstraţi că $|a| = |b| = |c|$;
   b) Aflaţi numerele a, b, c ştiind că $ab - ac = -50$.

5. Fie a, b, c $\in$ **Z*** cu proprietatea că $a^2 = bc$ și $b^2 = ac$.
   a) Arătați că $c^2 = ab$;
   b) Demonstrați că $a + b + c \neq 0$; (indicație: $a = b = c \in$ **Z***)
   c) Aflați a, b, c, astfel încât $(a^2 - b)(b^2 - c)(c^2 - a) = 216$

6. Calculați: $a = 13^{2015} - 14 \cdot 13^{2014} + 14 \cdot 13^{2013} - 14 \cdot 13^{2012} + ... + 14 \cdot 13^3 - 14 \cdot 13^2 + 14 \cdot 13 - 1$.

7. Comparați numerele $a = \left(2^{123} + \left|2^{123} - 3^{82}\right|\right) : 3^{81}$; $b = \left(4^{82} + \left|3^{123} - 4^{82}\right|\right) : 3^{122}$.

8. Determinați $k \in$ **Z** astfel încât $\dfrac{5-2k}{1-k} \in Z$.

9. Arătați că numerele $a = \dfrac{3x+1}{2}$ si $b = \dfrac{5x-2}{4}$ nu pot fi simultan numere întregi oricare ar fi numărul întreg x.

10. Rezolvați în **Z** x **Z** ecuațiile:
    a) $xy + x - y = 5$
    b) $2x - 15y = 10(1 - xy)$