

Numere raționale. Trapez

1. Fie  $k \in \mathbf{N}$  fixat și  $E(n) = \frac{n}{(-1)^n} + nk(-1)^n, n \in \mathbf{N}^*$ .
  - a) Demonstrați că  $E(n) = n(k+1)(-1)^n$ ;
  - b) Dacă  $S = E(1) + E(2) + E(3) + E(4) + \dots + E(100)$ , determinați cea mai mică valoare a lui  $k \in \mathbf{N}^*$  pentru care  $S$  este cub perfect.
2. Calculați:
  - a)  $A = \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{3 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{195 \cdot 588}$
  - b)  $B = \frac{1}{1+2326^{-1}} + \frac{1}{1+2325^{-1}} + \frac{1}{1+2324^{-1}} + \dots + \frac{1}{1+1^{-1}} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2326}$
3. Fie  $a = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{999 \cdot 1000}$  și  $b = \frac{1}{501} + \frac{1}{502} + \frac{1}{503} + \dots + \frac{1}{1000}$ .
  - a) Arătați că  $a = b$ ;
  - b) Arătați că  $\frac{1}{2} < a < 1$ .
4. Calculați  $s = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{70} + \frac{1}{130} + \frac{1}{208} + \frac{1}{304} + \frac{1}{418} + \frac{1}{550} + \frac{1}{700} + \frac{1}{868}$ .
5. Fie numerele  $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2015}{2016}$  și  $B = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2016}{2017}$ .
  - a) Să se calculeze  $A \cdot B$ ;
  - b) Să se arate că  $A < B$ ;
  - c) Să se arate că a patra zecimală a numărului  $A^2$  este cel mult 4.
6. Fie  $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2016} - \frac{1}{2017}$  și  $y = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016}$ .
  - a) Calculați media aritmetică a numerelor  $x$  și  $y$ ;
  - b) Arătați că  $x < y$ .
7. Se dă  $\triangle ABC$  cu  $m(\angle A) = 90^\circ$  și  $m(\angle B) = 30^\circ$ . Fie  $M$  mijlocul laturii  $[BC]$ . Mediatoarea laturii  $[BC]$  intersectează  $AB$  în  $E$  și  $AC$  în  $D$ . Arătați că:
  - a)  $[CE]$  este bisectoarea unghiului  $ACB$ ;
  - b)  $\triangle AEM$  este isoscel;
  - c)  $ADBM$  este trapez isoscel;
  - d)  $CE \perp BD$ .
8. Fie  $ABCD$  un trapez dreptunghic cu  $AB \parallel CD, AD \perp AB, AD = AB + CD$  și  $M \in [AD]$  astfel încât  $AM = AB$ . Arătați că:
  - a)  $\triangle BMC$  este dreptunghic;
  - b) Dacă  $N$  este mijlocul segmentului  $(BC)$ ,  $MC \cap DN = \{P\}$  și  $AN \cap MB = \{Q\}$ , atunci  $MPNQ$  este dreptunghi.
9. Fie  $ABCD$  un trapez isoscel cu  $AB \parallel CD$  și  $AB = 3CD$ . Înălțimea trapezului este egală cu  $2CD$ . Dacă  $[MN]$  este linia mijlocie a trapezului,  $M \in [AD]$  și  $N \in [BC]$ , iar  $DE \perp AB, E \in [AB]$ , arătați că:
  - a)  $AC \perp BD$ ;
  - b)  $AC, DE$  și  $MN$  sunt concurente;
  - c)  $ME \parallel BC$ .