Centrul de Excelenţă
Clasa a VII –a

Inegalităţi

1. Demonstraţi că $\frac{1}{a^2+b^2+ab}+\frac{1}{a^2+c^2+ac}+\frac{1}{b^2+c^2+bc}\le\frac{1}{abc}$, unde a, b, c ∈ **R*,** a + b + c = 1.

2. Demonstraţi inegalitatea $\frac{1}{2009}<\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot2005\cdot2007}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2006\cdot2008}<\frac{1}{\sqrt{2009}}$.

3. Demonstraţi că $\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{77^2}<0{,}25$.

4. Să se demonstreze că $|a|+2|b|+3|c|-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\le7$, oricare ar fi a, b, c ∈ **R.**

5. Se dau numerele

$a_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{n+1}$, $b_n=\frac{1}{3}+\frac{3}{5}+\frac{5}{7}+\ldots+\frac{2n-1}{2n+1}$, $c_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}$,

$d_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}$, unde $n\in N^*$.

Arătaţi că: a) $\frac{a_n}{b_n}>1$ b) $\frac{c_n}{d_n}<1$ c) $c_n^2<\frac{1}{2n+1}$ d) $d_n^2>\frac{1}{2n+1}$

6. Dacă a, b, c > 0, atunci $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\ge a+b+c$.

7. Să se demonstreze că $\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+\ldots+\frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1}<\frac{n}{2}$, oricare ar fi n ∈**N***.

8. Să se demonstreze că pentru orice n ∈**N***, are loc inegalitatea $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}>\frac{2n}{n+1}$.

9. Demonstraţi că $1000^{1000}>1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot999\cdot1001\cdot\ldots\cdot1997\cdot1999$.

10. Dacă a, b, c > 0 şi a + b + c = 1, atunci $\sqrt{a+2b+3c}+\sqrt{3a+b+2c}+\sqrt{2a+3b+c}\le3\sqrt{2}$.

11. (Teorema medianei) Se dă un triunghi ABC cu BC = a, AC = b, AB = c şi AM = m_a, unde AM este mediana corespunzătoare laturii BC. Demonstraţi că $m_a{}^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$.

12. Să se arate că în orice paralelogram ABCD cu AB ≥ AD are loc inegalitatea $AD^2\le\frac{AC^2+BD^2}{4}\le AB^2$.

13. Se consideră triunghiul de laturi a ≥ b ≥ c şi se notează cu m_c lungimea medianei corespunzătoare laturii c. Să se arate că $ab+bc+ca\le4m_c^2+2(a^2-c^2)$.