Centrul de Excelenţă
Clasa a VII –a

Relaţii metrice

1. Teorema medianei
Se dă triunghiul ABC cu BC = a, AC = b și AB = c. Se notează cu m_a lungimea medianei AM. Demonstrați că $m_a^2 = \frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$

2. Fie M un punct situat în interiorul dreptunghiului ABCD. Demonstrați că
$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

3. În triunghiul ABC se dau BC = a = 10 cm, AC = b și AB = c și medianele BB' și CC' au lungimile de 9 cm, respectiv 12 cm.
a) Arătați că $5a^2 = b^2 + c^2$.
b) Se prelungesc medianele BB' și CC' cu segmentele C'N = CC' și B'M = BB'. Dacă AD este înălțime în triunghiul ABC, demonstrați că triunghiul DMN este isoscel.
c) Demonstrați că medianele triunghiului ABC pot fi laturile unui triunghi dreptunghic.

4. În triunghiul ABC, lungimea laturii BC este de 5 cm, iar lungimile medianelor BB' și CC' sunt de 6 cm, respectiv 4,5 cm. Să se afle lungimile laturilor triunghiului ABC.

5. Printr-un punct M de pe diagonala BD a unui dreptunghi ABCD se duce o dreaptă perpendiculară pe dreapta BD care intersectează dreapta AB în E și dreapta BC în F. Demonstrați că:
a) $AB^2 \cdot ME = BC^2 \cdot MF$
b) oricare ar fi poziția punctului M pe BD, raportul $\frac{AB \cdot ME + BC \cdot MF}{MB}$ este constant.

6. În triunghiul dreptunghic ABC cu m(∠BAC) = 90°, AD ⊥ BC iar E și F sunt proiecțiile punctului D pe catetele AB și AC. Demonstrați că DB·DC = FC·FA + EB·EA.

7. Fie AC diagonala mare a paralelogramului ABCD. Fie E și F proiecțiile punctului C pe dreptele AB, respectiv AD. Demonstrați că $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$.

8. Se dă triunghiul echilateral ABC și AD ⊥ BC, D ∈ (BC). Fie A' simetricul punctului A față de dreapta BC și D' simetricul punctului D față de dreapta AC. Demonstrați că triunghiul AA'D' este dreptunghic.

9. Fie S aria unui triunghi, r lungimea razei cercului înscris în triunghi și P perimetrul triunghiului.
Demonstrați că $r = \frac{2S}{P}$.

10. Demonstrați că suma distanțelor de la un punct M la laturile unui triunghi echilateral este egală cu lungimea înălțimii triunghiului.

11. Să se demonstreze că în orice triunghi ascuţitunghic ABC are loc inegalitatea
$$\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} \geq a(\cos\hat{B}+\cos\hat{C})+b(\cos\hat{A}+\cos\hat{C})+c(\cos\hat{B}+\cos\hat{A}) \geq \sqrt{3(ab+bc+ca)}$$