Centrul de Excelenţă
Clasa a VIII –a

Numere reale. Operaţii cu numere reale reprezentate prin litere.

1. Fie E = $a^2 + b^2 + c^2 - a + 2b - 6c + 8$, unde a, b, c $\in$ **R**.
   a) Să se determine valoarea minimă a lui E.
   b) Arătaţi că dacă E = 0, atunci a $\in$ [-1 ; 2], b $\in$ [-2,5 ; 0,5] şi c $\in$ [1,5 ; 4,5].

2. a) Arătaţi că oricare ar fi a, b $\in$ $\mathbf{R}_+$ are loc inegalitatea: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$.
   b) Demonstraţi că pentru orice număr real x are loc inegalitatea:
   $\sqrt{x^2+25}+\sqrt{x^2+36}+\sqrt{x^2+49}+\sqrt{x^2+64} \geq (2x+13)\sqrt{2}$.

3. Demonstraţi că dacă xyz = 1, atunci $\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1$.

4. Fie x, y, z numere întregi distincte două câte două astfel încât xy + yz + xz = 26. Să se arate că $x^2 + y^2 + z^2 \geq 29$.

5. a) Descompuneţi în factori expresia $E(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$.
   b) Arătaţi că $E(x) \geq 0$, oricare ar fi x $\in$ **R** şi găsiţi valoarea lui x pentru care E(x) = 0.

6. Aflaţi valoarea minimă a expresiei $E(x) = (x + 1)(x - 4)(x^2 - 3x + 8) + 40$, unde
   x $\in$ **R**.

7. Determinaţi toate tripletele de numere reale a, b, c care verifică egalitatea
   $a^2+2b^2+3c^2+\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}+\frac{3}{c^2}=12$.

8. Se dau numerele reale nenule a, b, c. Să se arate că
   $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}=\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{a^3}{c^2+ca+a^2}$.

9. a) Demonstraţi că $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$, oricare ar fi $k \geq 1$.
   b) Demonstraţi că
   $\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} > 1$, oricare ar fi n $\in$ **N***.

10. Să se arate că dacă inversul sumei a trei numere este egal cu suma inverselor lor, atunci cel puţin două dintre numere au acelaşi modul.