Centrul de Excelenţă
Clasa a VIII –a

Numere reale. Intervale de numere reale.

1. a) Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $x^4 - y^4 = 16$

   b) Să se determine cel mai mare număr natural n pentru care $\frac{n^2-2012}{n+1} \in \mathbf{Z}$.

   c) Găsiți numerele reale a și b dacă $\max\{a^2-b+1; b^2+a+1\} \le \frac{3}{4}$.

2. a) Să se determine $x \in \mathbf{N}$ astfel încât $\sqrt{\frac{4x-5}{x+1}} \in \mathbf{N}$.

   b) Să se determine $x \in \mathbf{N}$ astfel încât $\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} \in \mathbf{N}$.

3. Determinaţi numerele naturale n pentru care $\sqrt{30-2\sqrt{n+1}}$ este număr natural.

4. Arătaţi că $\frac{11}{\sqrt{28}} + \frac{17}{\sqrt{70}} + \frac{29}{\sqrt{208}} > 6$.

5. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiei p: $\frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{20}}{9} + \frac{\sqrt{42}}{13} + \ldots + \frac{\sqrt{2n(2n+1)}}{4n+1} < \frac{n}{2}$.

6. Dacă $n \in \mathbf{N^*}$, arătaţi că $A \in \mathbf{N}$, unde $A = \sqrt{\underbrace{\overline{444\ldots4}}_{2n\text{ cifre}} - \underbrace{\overline{888\ldots8}}_{n\text{ cifre}}}$.

7. Ştiind că $(|2-a|+b)\sqrt{2} = b|1-\sqrt{2}|+2$, să se determine $a, b \in \mathbf{Q}$.

8. Calculaţi $S = \sqrt{2} + \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} + \ldots + \sqrt{2^{1000}}$.

9. Fie $a = \sqrt{6-\sqrt{35}} - \sqrt{6+\sqrt{35}}$. Calculati $(a+\sqrt{10})^{2013}$.

10. Se dau numerele reale $A = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}$ şi $B = \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$. Să se arate că $|A+B| = \sqrt{2}$ şi să se calculeze $\max\{A, |B|\}$.

11. Dacă x şi y verifică relaţia $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20$, atunci $x \in [-3; 7]$ şi $y \in [-6; 4]$.

12. Fie $x, y, z \in \mathbf{R}$ pentru care $x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + 2y - 3z) = 2$. Să se afle căror intervale aparţin numerele x, y, z.

13. Arătaţi că numărul real $A = \sqrt{n-\sqrt{2n-1}} + \sqrt{n+\sqrt{2n-1}}$ aparţine intervalului $(\sqrt{4n-3}; \sqrt{4n-1})$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N^*} \setminus \{1\}$.

14. Determinaţi toate numerele de două cifre $\overline{ab}$ astfel încât numărul $\sqrt{2(a+b)+\overline{ab}+\overline{ba}}$ să fie număr natural.