Centrul de Excelenţă
Clasa a VIII –a

Rapoarte de numere reale

1. Simplificaţi raportul $\dfrac{7x^3-8x^2-3x+4}{7x^3+6x^2-5x-4}$.

2. Fie raportul $F(x)=\dfrac{x^4-2x^3+x}{x^4-x^3-2x^2+x+1}$.
   a) Simplificaţi raportul;
   b) Determinaţi mulţimea A = {$x \in$ **Z** / F(x) $\in$ **Z**}.

3. Să se arate că raportul $\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)(x^6-x^3+1)(x^{18}-x^9+1)(x^{27}-1)}{(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)(x^{18}+x^9+1)(x^{27}+1)}$ nu depinde de x.

4. Demonstraţi că:
   a) $\dfrac{n^3}{n^2+n+1}<n+\dfrac{1}{3}$, oricare ar fi $n \in$ **N**;
   b) $\dfrac{4}{3}+\dfrac{7}{3}+\dfrac{10}{3}+...+\dfrac{3n+1}{3}=\dfrac{n(3n+5)}{6}$, oricare ar fi $n \in$ **N***;
   c) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{8}{7}+\dfrac{27}{13}+...+\dfrac{n^3}{n^2+n+1}<\dfrac{n(3n+5)}{6}$, oricare ar fi $n \in$ **N***;

5. a) Demonstraţi că dacă x şi y sunt numere reale pozitive, atunci $\dfrac{xy}{x+y}\le\dfrac{x+y}{4}$
   b) Să se demonstreze că dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, atunci are loc inegalitatea
   $$\frac{ab+bc+ac+a^2}{b+c+2a}+\frac{ab+bc+ac+b^2}{a+c+2b}+\frac{ab+bc+ac+c^2}{a+b+2c}\le a+b+c.$$

6. Ştiind că $a + b + c = 0$, $a, b, c \in$ **R***, demonstraţi că
   $$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\left(\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}\right)=9.$$

7. a) Demonstraţi că dacă x este număr real pozitiv, atunci $\dfrac{x^2+1}{x}\ge 2$.
   b) Fie numerele reale pozitive $a_1, a_2, ..., a_n$, unde $n \ge 3$. Demonstraţi că
   $$\frac{a_1^2+4a_1+5}{a_1+2}+\frac{a_2^2+4a_2+5}{a_2+2}+...+\frac{a_n^2+4a_n+5}{a_n+2}>2n$$