

Probleme recapitulative

1. Catetele de lungimi b și c ale unui triunghi dreptunghic satisfac relația $\sqrt{b^2 - 6b\sqrt{2} + 19} + \sqrt{c^2 - 4c\sqrt{3} + 16} \leq 3$. Să se determine lungimile laturilor triunghiului.
2. Se dă o prismă patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ cu $AA' = 2AB$ și $d(B'D', BC') = \sqrt{2}$ cm. Aflați aria laterală a prisme.
3. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat cu muchia de 36 cm. Dacă $N \in (BD)$ și $P \in (CD)$ astfel încât $BN = 8$ cm și $CP = 15$ cm, arătați că $(ANP) \perp (BCD)$.
4. Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub și M, N, P mijloacele muchiilor (AA') , (BC) și $(C'D')$. Să se arate că planul (MNP) formează unghiuri congruente cu fiecare față a cubului.
5. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată și E proiecția punctului A pe dreapta VC . Dacă $AB = a$, $\frac{VE}{EC} = k$, $a > 0$, $k > 0$, să se afle:
 - a. Volumul piramidei;
 - b. Cosinusul unghiului diedru dintre planele (VAC) și (VBC) .
6. Se dă un trapez isoscel $ABCD$ cu $AC \perp BC$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Diagonalele trapezului determină pe linia mijlocie a trapezului trei segmente congruente având lungimea de câte 4 cm. Fie $AM \perp (ABC)$, $AM = 6$ cm.
 - a. Să se arate că $MO \perp BC$;
 - b. Să se calculeze aria triunghiului MBO .
7. Demonstrați că în orice triunghi ascuțitunghic are loc relația $6 \cdot S_{\Delta ABC} \leq ab + bc + ca$.
8. Dacă $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, să se arate că $(x + 2y)^4 + (y + 2z)^4 + (z + 2x)^4 \geq 3(x + y + z)^4$.
9. Fie $n \in \mathbf{N}$. Comparați cu 0 numărul $a = \sqrt{n + \sqrt{6n - 9}} - \sqrt{n - \sqrt{6n - 9}} - \sqrt{6}$.
10. Să se determine $x \in [1, +\infty)$, $y \in (0, 1]$ știind că $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) \geq 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right)$.
11. Fie $a, b, c \in [0, +\infty)$ astfel încât $a + b + c = 2\sqrt{abc}$. Să se arate că $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{abc}$.
12. Fie $a, b, c \in (0, +\infty)$ astfel încât $abc = 1$. Demonstrați că $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$.
13. Demonstrați că dacă $x, y \in \mathbf{R}$, atunci $6x^2 + 6y^2 - 6xy + 1 - 2x + 4y > 0$.