Centrul de Excelență
Clasa a VIII –a

Probleme de concurs

1. Se dă un cub ABCDA’B’C’D’cu latura de 8 cm. Fie E mijlocul muchiei BB’. Aflaţi:
   a) $m(\widehat{AB', BD})$
   b) sinusul unghiului format de planele (A’BD) şi (BC’D)
   c) d(E, (ACC’))

(Olimpiada de matematică, etapa locală, Buzău, 2005)

2. Să se arate că dacă x, y, z sunt numere raţionale nenule astfel încât $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, atunci numărul $A=\left(\frac{xy}{z}+1\right)\left(\frac{yz}{x}+1\right)\left(\frac{xz}{y}+1\right)$ este nenegativ. Calculați $\sqrt{A}$.

(Olimpiada de matematică, etapa locală, Bihor, 2005)

3. a) Să se arate că $x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\geq x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$, oricare ar fi numerele reale pozitive x şi y.
   b) Arătaţi că pentru orice număr natural nenul n are loc inegalitatea:
   $$\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{4}+3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

(Olimpiada de matematică, etapa locală, Brașov, 2008)

4. a) Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, demonstraţi că E(a, b, c) < 0, unde $E(a, b, c) = (c^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2 b^2$.
   b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(x + 1)(3x + 5)(3x + 4)^2 = 4$.

(Olimpiada de matematică, etapa locală, Sibiu, 2005)

5. Se consideră numerele reale pozitive x,y, z. Arătaţi că :
   a) dacă x*y*z = 1, atunci $(x + y)z^2 + (y + z)x^2 + (z + x)y^2 \geq 6$.
   b) dacă x + y + z = 1, atunci $x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)\leq\frac{1}{4}$.

(Olimpiada de matematică, etapa locală, Sibiu, 2005)

6. Se dă un triunghi ABC cu $m(\angle A) = 90°$, AB = 3 cm şi AC = 4 cm. Fie S un punct din spaţiu, $S \notin (ABC)$, astfel încât planele (SAB), (SBC) şi (SAC) formează cu planul (ABC) unghiuri congruente de măsură 60°. Să se calculeze :
   a) distanţa de la punctul S la planul (ABC)
   b) ariile triunghiurilor SAB, SBC şi SAC.

(Olimpiada de matematică, etapa locală, Bihor, 2005)

7. Se dă un romb ABCD cu AB = a şi $m(\angle B) = 60°$. Fie $SA \perp (ABC)$, SA = a iar E şi F mijloacele segmentelor (AB), respectiv (AD).
   a) Să se găsească punctul $M \in (CS)$ egal depărtat de punctele A, C, E, F şi S.
   b) Calculaţi sinusul unghiului format de planele (EFS) şi (EFM).

(Olimpiada de matematică, etapa locală, Vaslui, 2005)