OLIMPIADA NAŢIONALA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 30 IANUARIE 2010

Clasa a V-a

Problema 2. Se consideră numerele de forma $\overline{aabb}$ cu $a \neq b$.

a) Calculați suma dintre cel mai mic și cel mai mare număr de forma $\overline{aabb}$.

b) Arătați că numerele de forma $\overline{aabb}$ sunt divizibile cu 11.

c) Determinați pătratele perfecte de forma $\overline{aabb}$.

Adriana Olaru, Călăraşi

Problema 1. Fie şirul primelor 400 de numere naturale, în ordine crescătoare, care prin împărţirea la 2011 dau restul un număr natural de două cifre.

a) Aflaţi suma primelor 90 de elemente ale şirului.

b) Determinaţi cel mai mare element al şirului.

Aurelia Caţaros şi Adriana Constantin, Călăraşi

Problema 3. Trei copii se joacă astfel: A aşează pe o masă două zaruri suprapuse, C așează lângă ele trei zaruri unul peste altul iar D continuă cu patru zaruri suprapuse.

a) Ştiind că în fiecare caz suma punctelor de pe feţele invizibile este pătrat perfect, precizaţi câte puncte sunt pe faţa de deasupra în fiecare caz în parte.

b) Se poate respecta condiţia suprapunând cinci zaruri? (suma punctelor de pe două feţe opuse ale unui zar este egală cu 7).

Sica Furtună şi Sorin Furtună, Călăraşi

c) Un calculator împarte mulțimea numerelor naturale impare în submulțimi astfel :
$\{1\};\{3,5\};\{7,9,11\};\{13,15,17,19\}...$. Există o multime de acest tip care începe cu 2011?

Relu Ciupea, Olteniţa

Problema 4. a) Într-o urnă sunt 50 de bile albe, negre şi roşii. Oricum am extrage 42 bile din urnă, vom găsi o bila neagră. Oricum am extrage 26 bile din urnă , vom găsi o bilă albă. Oricum am lăsa în urnă 15 bile, printre cele extrase vom avea o bilă roşie. Câte bile de fiecare culoare sunt în urnă? Justificaţi răspunsul.

Gabriela Ruse, Călărași

b) Pentru un fast food s-a cumpărat ulei şi oțet îmbuteliat în 5 bidoane de capacități diferite. Etichetele de pe bidoane s-au desprins dar au rămas inscripționate capacitățile. Dacă se cunosc următoarele: în depozitul din care s-a cumpărat a mai rămas un singur bidon; capacitățile bidoanelor sunt de 8 litri, 13 litri, 15litri, 17 litri, 19litri și 31 litri; un litru de ulei costă de două ori mai mult decât unul de oțet; s-a plătit aceeași sumă pentru ulei și oțet și suma totală a fost 336 lei. Precizați conținutul, ulei sau oțet, al fiecărui bidon cumpărat.

Eugenia Vlad, Călăraşi

SUCCES!

<u>Notă</u> : Durata concursului este de trei ore .
Baremul de notare este: **Problema 1** a) 2 puncte; b) 2 puncte; c) 3 puncte; **Problema 2.** a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 3.** a) 2 puncte; b) 2 puncte; c) 3 puncte; **Problema 4.** a) 3 puncte; b) 4 puncte.

OLIMPIADA NAŢIONALA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 30 IANUARIE 2010

Clasa a VI-a

Problema 1. a) Se consideră următoarele numere în baza zece : $\overline{a1b3}$, $\overline{b4c6}$, $\overline{c7a9}$ unde a, b, c sunt cifre nenule. Dacă fiecare din cele trei numere este divizibil cu 3 să se arate că $\overline{abc}$ este divizibil cu 3.

Relu Ciupea, Olteniţa

b) Un număr de trei cifre se numeşte „local" dacă produsul cifrelor sale este un pătrat perfect nenul, iar suma cifrelor sale este un număr natural mai mic sau egal decât 10. Câte elemente are mulțimea numerelor locale divizibile cu 3.

Georgeta Cioboată, Călăraşi

Problema 2. a) Se consideră unghiurile *AOB*, *BOC*, *COA* în jurul punctului *O*, si bisectoarele acestora, [*OX*, [*OY*, [*OZ*. Să se determine măsurile unghiurilor *AOB*, *BOC*, *COA* stiind că unghiurilor *XOY*, *YOZ*, *ZOX* au măsurile exprimate prin trei numere naturale consecutive.

Gheorghe Fianu, Ștefan cel Mare

b) Demonstrați că numărul $n = 2011\cdot 2010 - 2010\cdot 2009 + 2009\cdot 2008 - 2008\cdot 2007 + ... + 3\cdot 2 - 2\cdot 1$ este divizibil cu 2010.

Eugen Predoiu, Călăraşi

Problema 3. Fie unghiul propriu $\angle XOY$, în interiorul său semidreptele [*OZ* şi [*OT* cu proprietatea $m(\angle XOZ) = m(\angle ZOT) = m(\angle TOY)$, punctele $A \in (OX$, $B \in (OY$, $C \in (OZ$, $D \in (OT$ astfel încât $[OC] \equiv [OD]$ iarunghiurile $\angle OAD$ si $\angle OBC$ sunt congruente. Dacă $(AD) \cap (BC) = \{E\}$ arătați că ΔOEA este congruent cu ΔOEB ·

Sica Furtună şi Sorin Furtună, Călăraşi

Problema 4. a) La un turneu de fotbal au participat 6 echipe: A, B, C, D, E, F. În urma disputării tuturor celor 45 de meciuri, tabelul cu numărul de victorii (V), numărul de înfrângeri (Î) şi numărul de meciuri egale (remize) (R) se prezintă astfel:

Determinați câte victorii, câte înfrângeri şi câte meciuri egale a acumulat echipa F.

Echipa	V	Î	R
A	5	8	2
B	4	8	3
C	3	10	2
D	5	7	3
E	7	5	3
F	*a*	*b*	*c*

b) Dacă x, y, z, u sunt numere naturale astfel încât $8x$-$7y$-$28z$+$14u$=0, arătați că 14 divide produsul xy.

G.M. 11/2010

SUCCES!

Notă : Durata concursului este de trei ore .
Baremul de notare este: **Problema 1** a) 4 puncte; b) 3 puncte; **Problema 2.** a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 3.** a) 7 puncte; **Problema 4.** a) 3 puncte; b) 4 puncte.

OLIMPIADA NAŢIONALA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 30 IANUARIE 2010

Clasa a VII-a

Problema 1. Fie numerele $x=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{9}{11}\cdot\ldots\cdot\frac{2009}{2011}$ şi $y=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{11}{13}\cdot\ldots\cdot\frac{2011}{2013}$.

a) Arătați că $\frac{n-2}{n}<\frac{n}{n+2}$, $(\forall)n\in\mathbb{N},\ n\geq 3$;

b) Arătați că $x<y$;

c) Să se găsească primele trei zecimale ale numărului x^2.

Relu Ciupea, Olteniţa

Problema 2. a) Arătați că $\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{k}<\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}$; $\forall k\in\mathbb{N}-\{0,1\}$.

b) Fie $S_n=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}+\cdots\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n}$. Să se determine mulțimea $A=\{n\in\mathbb{N}^*\mid S_n<0{,}9\}$.

Gheorghe Fianu, Ștefan cel Mare

c) Dacă $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$ și $ab+bc+ca=2011$ atunci arătați că $\sqrt{(2011+a^2)(2011+b^2)(2011+c^2)}\in\mathbb{Q}$.

Eugen Predoiu și Adrian Mărculescu, Călăraşi

Problema 3. a) Fie O punctul de intersecție al diagonalelor unui patrulater convex $ABCD$. Să se demonstreze ca daca $\mathrm{A}^2_{DOC}=\mathrm{A}_{BOC}\cdot\mathrm{A}_{AOD}$, atunci $ABCD$ este trapez.

Cristina Bornea, Călăraşi

b) În triunghiul ABC punctul D este mijlocul lui $[BC]$, punctul E este mijlocul lui $[AD]$ și $\{F\}=BE\cap AC$. Arătati că $5\cdot\mathrm{A}_{ABC}=12\cdot\mathrm{A}_{DCFE}$. ($\mathrm{A}_{XYZ\ldots}$ este aria suprafetei poligonale XYZ...)

Gheorghe Fianu, Ștefan cel Mare

Problema 4. Fie triunghiul ABC isoscel $([AB]\equiv[AC])$ și punctele $D,\ E,\ F$ astfel încât $D\in(BC)$, $E\in(AC)$ și $F\in AC$. Dacă $(AD$ și $(BE$ sunt bisectoarele unghiurilor $\angle BAC$ respectiv $\angle ABC$, $BE=2\cdot AD$ și $BF\perp AC$ arătați că $(BA$ este bisectoare unghiului $\angle EBF$.

Nela Costache, Călăraşi

SUCCES!

Notă : Durata concursului este de trei ore .

Baremul de notare este: **Problema 1** a) 2 puncte; b) 2 puncte; c) 3 puncte; **Problema 2.** a) 2 puncte; b) 2 puncte; c) 3 puncte; **Problema 3.** a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 4.** 7 puncte.

OLIMPIADA NAŢIONALA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 30 IANUARIE 2010

Clasa a VIII-a

Problema 1. a) Calculați $(x-1)(x+1)(x+2)$;

b) Calculați $(x^2-x-1)^2$;

c) Există patru numere naturale nenule și consecutive al căror produs este un pătrat perfect? (Justificați răspunsul)

Viorica Stoianovici, Călăraşi

Problema 2. Se consideră cubul *ALGORITM*. Fie *E* mijlocul segmentului *AL*, iar *F* mijlocul segmentului *LG*. Dacă muchia cubului are lungimea $2a$, $a>0$ atunci:

a) Calculaţi sinusul unghiului diedru format de planele (*TOF*) şi (*ALG*).

b) Arătaţi că $(GET)\perp(TOF)$.

Gabriela Ruse, Călăraşi

Problema 3. a) Dacă $a, b, c\in[3,\infty)$ arătați că $ab+ac+bc+18\geq 6(a+b+c)$.

Florica si Lucian Ioniță, Călăraşi

b) Determinaţi toate numerele $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\left[\sqrt{x}\right]$, $2\cdot\left[\sqrt{x}\right]$ şi $\left[2\cdot\sqrt{x}\right]$ sunt consecutive**.**

Gheorghe Fianu, Ștefan cel Mare

Problema 4. Fie *MATE* un tetraedru regulat, *P* mijlocul muchiei [*TE*], iar *Q* un punct al muchiei [*ME*] pentru care suma *PQ* + *QA* este minimă.

a) Aflaţi sinusul unghiului diedru format de planelor (*MAT*) şi (*MAP*).

b) Aflaţi valoarea raportului $\dfrac{PQ}{QA}$.

Luminița Bucureșteanu, Călăraşi

SUCCES!

<u>Notă</u> : Durata concursului este de trei ore .

Baremul de notare este: **Problema 1** a) 2 puncte; b) 2 puncte; c) 3 puncte; **Problema 2.** a) 4 puncte; b) 3 puncte; **Problema 3.** a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 4.** a) 3 puncte; b) 4 puncte..